

АДИЕВА АЙНАГУЛЬ ЖАНИБЕКОВНА

**ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧЛЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА**

АННОТАЦИЯ

**диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по
специальности 6D060100-Математика**

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена исследованию осцилляционных свойств двухчленного линейного дифференциального уравнения четвертого и $2n - \text{го}$ ($n > 2$) порядков.

Изучение качественных свойств дифференциальных уравнений начало появляться с XIX века в задачах физики и механики. В 1836 году Штурм исследуя поведение решений линейных дифференциальных уравнений, впервые ввел понятие осцилляторности уравнения, как уравнение с свойством, что любое его решение имеет бесконечное число нулей и доказал свои известные теоремы сравнения и разделения нулей.

Исследование осцилляционных свойств дифференциального уравнения второго порядка началось со знаменитой работы Штурма и продолжает развиваться до сих пор.

Исследование осцилляционных свойств дифференциального уравнения является разделом математического анализа, и по данной теме опубликовано множество статей и книг. Большинство результатов относятся к уравнениям второго порядка. Уравнения четвертого и более высокого порядков изучены слабо, рассмотрены только случаи, когда часть или все коэффициенты уравнения являются степенными функциями, это связано с отсутствием простых и эффективных методов исследования уравнений второго порядка. Одним из методов исследования осцилляционных свойств дифференциальных уравнений четвертого и более высокого порядков является переход от уравнения к гамильтоновой системе уравнений и применение к полученной системе метода Рикатти. Но и здесь возникают трудности с поиском фундаментального решения гамильтоновой системы. Другой метод называется «вариационным принципом» или просто «вариационным методом». В вариационном методе рассматриваемые задачи, приводятся к исследованию весовых дифференциальных неравенств высшего порядка, исследование которых еще полностью не завершены.

Во многих работах, связанных с темой диссертации, исследовались осцилляционные свойства дифференциального уравнения четвертого порядка. Анализ данных работ показал, что для уравнений четвертого порядка имеются много недостатков. Их можно разделить на две группы. Недостатки одной из групп, где только один из коэффициентов является произвольной функцией, а остальные являются степенными функциями или же все коэффициенты степенные функции. Поэтому, из-за невозможности исследования дифференциальных уравнений с вышеназванными проблемами,

коэффициенты которых являются произвольными функциями, рассматриваются различные возмущения известного уравнения Эйлера.

Вторая группа недостатков состоит в том, что при переходе от дифференциального уравнения высшего порядка к системе дифференциальных уравнений, полученные результаты выражаются решениями этой системы. При исследовании дифференциальных уравнений $2n$ -го ($n > 2$) порядка недостатки для уравнений четвертого порядка повторяются. Таким образом, проблема описания признаков осцилляторности и неосцилляторности дифференциальных уравнений четвертого и $2n$ -го ($n > 2$) порядков в терминах коэффициентов остается открытой.

Диссертационная работа посвящена исследованию вышеупомянутого актуального вопроса вариационным методом. Во-первых, получены критерии выполнения весового дифференциального неравенства второго порядка и двусторонние оценки его наименьшей константы в зависимости от степени сингулярности весовых функций на бесконечности. На основе полученных результатов всесторонне исследованы свойства осцилляторности и неосцилляторности двухчленного дифференциального уравнения четвертого порядка, и в зависимости от степени сингулярности коэффициентов уравнения на бесконечности результаты даны только в терминах коэффициентов. Полученные результаты для двухчленного дифференциального уравнения $2n$ -го ($n > 2$) порядка основаны на результате, полученном в одном случае выполнения весового дифференциального неравенства n -го ($n > 4$) порядка.

Осцилляционные свойства дифференциальных уравнений исследуют ученые разных стран мира. Например, ученые из России, Китая, Америки, Японии, Турции, Саудовской Аравии, Египта, Франции, Германии, Чехии и Венгрии.

В Казахстане изучение осцилляционных свойств дифференциальных уравнений началось с работы М. Отелбаева и продолжено в работах Р. Ойнарова, Л. Кусаиновой, Б. Кошкаровой. На эту тему защитили диссертации К. Мырзатаева, М. Алдай, С. Алимагамбетова, С. Кудабаева, Х. Рамазанова.

Цель диссертационного исследования. Цель исследования – нахождение в терминах коэффициентов необходимых, достаточных условий осцилляторности и неосцилляторности на бесконечности двухчленного дифференциального уравнения четвертого и $2n$ -го ($n > 2$) порядка с неотрицательными коэффициентами.

Задачи исследования. Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Получить необходимые и достаточные условия выполнения весового дифференциального неравенства второго порядка в терминах весовых функций;

- Получить двусторонние оценки для наилучшей константы в весовом дифференциальном неравенстве второго порядка и вычислить константы эквивалентности;
- Получить необходимые, достаточные условия осцилляторности и неосцилляторности двухчленного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка в терминах коэффициентов;
- Получить необходимые и достаточные условия сильной осцилляторности и сильной неосцилляторности двухчленного линейного дифференциального уравнения в терминах коэффициентов;
- Получить необходимые, достаточные условия осцилляторности и неосцилляторности линейного дифференциального уравнения $2n$ -го ($n > 2$) порядка в терминах коэффициентов.

Объект исследования. Объектом исследования являются линейные дифференциальные уравнения четвертого и $2n$ -го ($n > 2$) порядков, весовые дифференциальные неравенства второго и n -го ($n > 4$) порядков.

Метод исследования. На основе вариационного принципа, с использованием результатов теории весового дифференциального неравенства исследуется осцилляторность и неосцилляторность дифференциального уравнения.

Научная новизна исследования. Новое условие выполнения дифференциального неравенства второго порядка с произвольными неотрицательными весами и оценка его наилучшей константы, новые условия осцилляторности и неосцилляторности линейного дифференциального уравнения четвертого и $2n$ -го ($n > 2$) порядков с произвольными неотрицательными коэффициентами.

На защиту выносятся следующие результаты.

- Получены необходимые и достаточные условия выполнения весового дифференциального неравенства второго порядка в терминах весовых функций;
- Для наилучшей константы в весовом дифференциальном неравенстве второго порядка были получены двусторонние оценки и вычислены константы эквивалентности;
- Необходимые, достаточные условия осцилляторности и неосцилляторности двухчленного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка в терминах коэффициентов;
- Необходимые и достаточные условия сильной осцилляторности и сильной неосцилляторности двухчленного линейного дифференциального уравнения в терминах коэффициентов;
- Необходимые, достаточные условия осцилляторности и неосцилляторности линейного дифференциального уравнения $2n$ -го ($n > 2$) порядка в терминах коэффициентов.

Теоретическая и практическая ценность полученных результатов.

Работа имеет теоретический характер. Полученные в работе результаты по весовому дифференциальному неравенству второго порядка, являются вкладом в теорию весовых неравенств и могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений и интегральных операторов, в гармоническом анализе. Результаты по осцилляторности и неосцилляторности двухчленного линейного дифференциального уравнения четвертого и $2n$ -го ($n > 2$) порядков являются вкладом в качественную теорию дифференциальных уравнений и могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов.

Личный вклад докторанта. Исследовательская работа, представленная в диссертации, выполнена при непосредственном участии автора. Для получения условия осцилляторности и неосцилляторности дифференциального уравнения высшего порядка, дано описание рассматриваемого пространства в различных условиях и рассмотрено выполнение дифференциального неравенства и вычислены эквивалентные константы для наилучшей постоянной этого неравенства. На основе вариационного метода получены новые условия осцилляторности и неосцилляторности, сильной осцилляторности и неосцилляторности дифференциального уравнения высшего порядка. Полученные результаты были опубликованы в виде научных статей и научных докладов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты и научные выводы диссертационных исследований обсуждались на научных семинарах «Функциональный анализ и его приложения» кафедры «Фундаментальная математика» Евразийского национального университета им. Л.Гумилева и доложены на следующих международных конференциях:

- Признаки осцилляторности и неосцилляторности одного класса дифференциальных уравнений четвертого порядка. Материалы международной научной конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченной к 70-летию д.ф.-м.н., профессора Рамазанова М.И. Караганда, 12-13 июня 2019, с. 59-60.
- Об одном переопределенном весовом неравенстве типа Харди в дифференциальной форме. Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019). Нур-Султан, 16-19 октября 2019, с. 15-17.
- Сильная осцилляторность и неосцилляторность двухчленного дифференциального уравнения четвертого порядка. Тезисы докладов международной узбекско-российской научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». Ташкент, 24-26 октября 2019, с.42-43.

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 11 работах, в том числе 4 статьи в изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, 1 статья в журнале из базы Scopus

с процентилем по CiteScore не меньшим, чем 25 и 5 тезисов в материалах международных научных конференций.

Объем и структура диссертации. Диссертация написана на казахском языке, состоит из введения, основной части из трех разделов и заключения, списка использованной литературы, включающего 75 наименований. Общий объем диссертации составляет 99 страниц.

В первой главе приведены необходимые известные факты и утверждения, получены условия выполнения весового дифференциального неравенства второго порядка. Во второй главе получены условия осцилляторности и неосцилляторности двухвесового линейного и полулинейного дифференциальных уравнений четвертого порядка, условия сильной осцилляторности и сильной неосцилляторности двухвесового линейного дифференциального уравнения. В третьей главе получены условия осцилляторности и неосцилляторности линейного дифференциального уравнения высшего порядка. В заключении сформулированы основные выводы и результаты работы.